

Sustentare, Três Corações, v. 1, n. 1, p. 108-117, ago./dez. 2017

MÉTODOS DE ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO LOG-NORMAL A 3 PARÂMETROS PARA A PRECIPITAÇÃO MÁXIMA DIÁRIA EM MUNICIPIOS COM MÉDIO A ALTO POTENCIAL EROSIVO

Rosângela Francisca de Paula Vitor MARQUES¹; Carlos Rogério de MELLO²; Camila Silva FRANCO³; Alisson Souza de OLIVEIRA⁴; Eliana ALCANTRA⁵

¹ Engenheira Florestal. Doutora em Recursos Hídricos em Sistemas Agrícolas (UFLA). Professora tempo integral – Mestrado em Sustentabilidade em Recursos Hídricos (UNINCOR) E-mail: roeflorestal@hotmail.com

² Engenheiro Agrícola. Doutor em Engenharia em Ciência do Solo (UFLA). Professor Associado da Universidade Federal de Lavras (UFLA). E-mail: crmello@deg.ufla.br.

³ Engenheira Ambiental. Doutora em Recursos Hídricos em Sistemas Agrícolas (UFLA). Professora Adjunta da Universidade Federal de Lavras (UFLA). E-mail: camilasilvafranco@deg.ufla.br

⁴ Engenheiro Agrônomo. Doutor em Recursos Hídricos em Sistemas Agrícolas (UFLA) E-mail: alisonso@hotmail.com

⁵ Engenheira Agrônoma. Doutora em Entomologia (UFLA) Professora tempo integral – Mestrado em Sustentabilidade em Recursos Hídricos (UNINCOR) E-mail: prof.eliana.alcantra@unincor.edu.br

Recebido em: 31/10/2017 Aprovado em: 29/11/2017 - Disponibilizado em: 30/12/2017

RESUMO: Estudos probabilísticos de variáveis hidrológicas, como a precipitação pluvial máxima diária anual, constituem em um importante elemento de apoio para o planejamento e a gestão de recursos hídricos, principalmente no que diz respeito ao estudo de precipitações intensas, as quais apresentam um potencial erosivo. Neste contexto, objetivou-se analisar o desempenho da distribuição Log Normal a 3 parâmetros, os quais foram ajustados pelos Métodos dos Momentos (MM) e da Máxima Verossimilhança (MV), aplicadas sobre as séries históricas de precipitação diária máxima anual de 7 estações pluviométricas em regiões com elevado risco potencial erosivo, em Minas Gerais, obtidas do HIDROWEB/ANA com pelo menos 33 anos de observação. Para a verificação da melhor estimativa dos parâmetros dos métodos utilizados, foram aplicados os testes de aderência de Komolgorov Smirnov, Anderson Darling e Qui-quadrado. Não se pode identificar qual o melhor método de estimativa dos parâmetros, porém ao se comparar os testes de aderência, o qui-quadrado é o mais restritivo com porcentagens de adequacidade 71,3% para os dois métodos de ajuste, devendo o mesmo ser tomado como base para os estudos, principalmente quando associados ao risco do potencial erosivo de uma precipitação.

Palavras-Chave: Distribuição de Probabilidade. Eventos extremos. Testes estatísticos não paramétricos. Método dos Momentos. Método da Máxima Verossimilhança.

METHODS OF ESTIMATES OF PARAMETERS OF LOG-NORMAL DISTRIBUTION TO 3 PARAMETERS FOR THE MAXIMUM DAILY PRECIPITATION IN CITIES WITH MEDIUM TO HIGH EROSIVE POTENTIAL

ABSTRACT: Probabilistic studies of hydrological variables, such as annual maximum daily rainfall, constitute an important element of support for the planning and management of water resources, especially with regard to the study of intense rainfall, which have an erosive potential. In this context, the objective was to analyze the performance of the Log Normal distribution to 3 parameters, which were adjusted by the Moment (MM) and Maximum Likelihood (MV) methods applied to the historical series of annual maximum daily rainfall of 7 rainfall stations in regions with high potential erosive potential, in Minas Gerais, obtained from HIDROWEB / ANA with at least 33 years of observation. In order to verify the best estimation of the parameters of the methods used, the adhesion tests of Komolgorov Smirnov, Anderson Darling and Chi-square were applied. It is not possible to identify the best method of estimating the parameters, but when comparing the adhesion tests, the chi-square is the most restrictive with 71.3% adequacy percentages for the two adjustment methods, and it should be taken as a basis for the studies, especially when associated to the risk of the erosive potential of a rainfall.

Keywords: Probability distribution. Heavy rainfall events. non-parametric statistical tests. Moments Method. Maximum Likelihood Method.

INTRODUÇÃO

Estudos probabilísticos de variáveis hidrológicas, como a precipitação pluvial máxima diária anual, constituem em um importante elemento de apoio para o planejamento e a gestão de recursos hídricos, principalmente no que diz respeito ao estudo de chuvas intensas, as quais apresentam um potencial erosivo. Dentre as características de grande interesse das precipitações está o estudo da frequência da precipitação pluvial diária máxima, que é normalmente representada por uma Função de Probabilidade que melhor se ajuste a valores extremos, sendo do tipo assintótico (MELLO & SILVA, 2005). E, segundo Calgaro et al. (2009) uma das maneiras de se conhecer essa distribuição é por meio da modelagem dessa variável no tempo e no espaço.

A utilização de distribuições de probabilidade, de acordo com Catalunha et al. (2002), está diretamente associado à natureza dos dados, sendo que algumas têm boa capacidade de estimação para pequeno número de dados, outras requerem grandes séries de observações. A utilização ou não de uma distribuição reside na capacidade da mesma em estimar as frequências observadas com base em seus parâmetros, e esta capacidade é medida através de testes de aderência.

Há diversas distribuições de probabilidade para valores extremos, como as chuvas máximas diárias anuais. Sendo as recomendadas, de acordo com Naghettini & Pinto (2007), distribuições de Gumbel, a Generalizada de Valores Extremos (GEV), Fréchet, Weibull, Log-Normal a 2 Parâmetros e Log-Normal a 2 Parâmetros e Pearson tipo III. Sendo que a estimativa dos parâmetros destas distribuições estatísticas podem ser encontrados por meio dos Métodos dos Momentos (MM), Máxima Verossimilhança (MV) e Método dos Momentos L (ML).

Os métodos de ajuste dos parâmetros das distribuições de probabilidades, dentre eles o dos momentos, da máxima verossimilhança, podem conduzir a resultados diferentes, sendo, segundo Naghettini & Pinto (2007), o método dos momentos (MM) o mais simples para a estimação dos parâmetros e menos eficiente do que os estimadores de máxima verossimilhança (MV), particularmente para distribuições com três parâmetros. O método da máxima verossimilhança (MV) maximiza a plausibilidade da distribuição a ser representada pelos parâmetros estimados. (NAGHETTINI & PINTO, 2007).

Vários trabalhos na literatura têm estudado diversas distribuições de probabilidade para valores extremos, com destaque para a Gumbel e a Generalizada de

Valores Extremos (GEV), as quais têm produzido melhores ajustes, porém as distribuições Log- Normal a 3 P, devido à sua simplicidade e rapidez tem sido utilizada também, sendo que a mesma apresenta um coeficiente de assimetria com um valor não fixo e sempre maior do que zero, o que , de acordo com Naghettini & Pinto (2007) fazem da distribuição log-normal uma forma paramétrica que pode se adequar muito bem à modelação de vazões e alturas de precipitações máximas (ou médias) mensais, trimestrais ou anuais.

Observa-se na literatura a utilização da distribuição Log-Normal a 3 parâmetros na estimativa de precipitação provável, a fim de considerar a chuva em projetos de irrigação e evitar o superdimensionamento (JUNQUEIRA JÚNIOR et al., 2007; LONGO et al., 2006; RODRIGUES et al., 2013).

Segundo Back (2001), a distribuição Log-Normal a 3 parâmetros foi obtida como sendo a mais adequada para estimativas de precipitação máxima diária de Santa Catarina quando se tratam de séries de dados com baixa assimetria e curtose e o método MV para estimativa dos parâmetros mais adequado que o MM para esta distribuição.

Caldeira et al. (2016) ao analisar o ajuste dos modelos probabilísticos das distribuições Log-Normal a 2 e 3 parâmetros e Gumbel, de séries

pluviométricas de precipitação máxima diária anual de 342 estações no Rio Grande do Sul concluíram que todas as distribuições de probabilidade consideradas foram adequadas; entretanto, a distribuição Log-Normal a 3 parâmetros apresentou os melhores ajustes segundo os resultados do teste Qui-Quadrado.

Miranda et al. (2017) ao estudar o comportamento de modelos probabilísticos na predição da precipitação máxima diária anual, bem como modelos de chuvas intensas para o município de Divinópolis – MG, utilizaram as distribuições de probabilidade de Gumbel para máximos, Fréchet, Gama, Log-Normal 2 parâmetros e LogNormal 3 parâmetros. Neste estudo, concluíram que as distribuições que melhor se ajustaram aos dados foi a de Gumbel , seguida pela Log-Normal 3P e 2P.

Martins et al. (2011) aplicaram as distribuições de probabilidade de Gumbel, Log-Normal com três parâmetros, Pearson III, Log Pearson Tipo III e GEV e o teste de Kolmogorov-Smirnov como teste de aderência. Os resultados obtidos demonstraram a aplicabilidade de todos os modelos teóricos para a estimativa da precipitação máxima em diferentes períodos de retorno

Neste contexto, objetivou-se analisar o desempenho da distribuição Log Normal a 3 parâmetros, os quais foram ajustados pelos Métodos dos Momentos e

da Máxima Verossimilhança, aplicadas sobre as séries históricas de precipitação diária máxima anual de 7 estações pluviométricas em regiões com elevado risco potencial erosivo, em Minas Gerais

MATERIAL E MÉTODOS

Foram utilizados dados de precipitação diária máxima anual para a constituição das séries históricas. Estes dados foram obtidos junto à Agência Nacional de Águas (ANA/HIDROWEB, 2012) de sete estações pluviométricas de Minas Gerais, em zonas de média a alta ocorrência de chuvas intensas, de acordo

com Mello et al. (2007): Barbacena, Carmo da Mata, Desterro Mello, Divinópolis, Estiva, Itapecirica e Ouro Preto, em diferentes períodos, com pelo menos 33 anos de dados observados, e uma característica comum à todas estações que apresenta de médio a alto potencial erosivo (Tabela 1 e Figura 1).

De acordo com o Centro Nacional de Monitoramento e Alerta de Desastres Naturais – (CEMADEN, 2014), os municípios de Barbacena, Desterro do Melo e Ouro Preto estão localizados em áreas de alto risco ao deslizamento de encostas.

Figura 1 Localização das estações pluviométricas analisadas

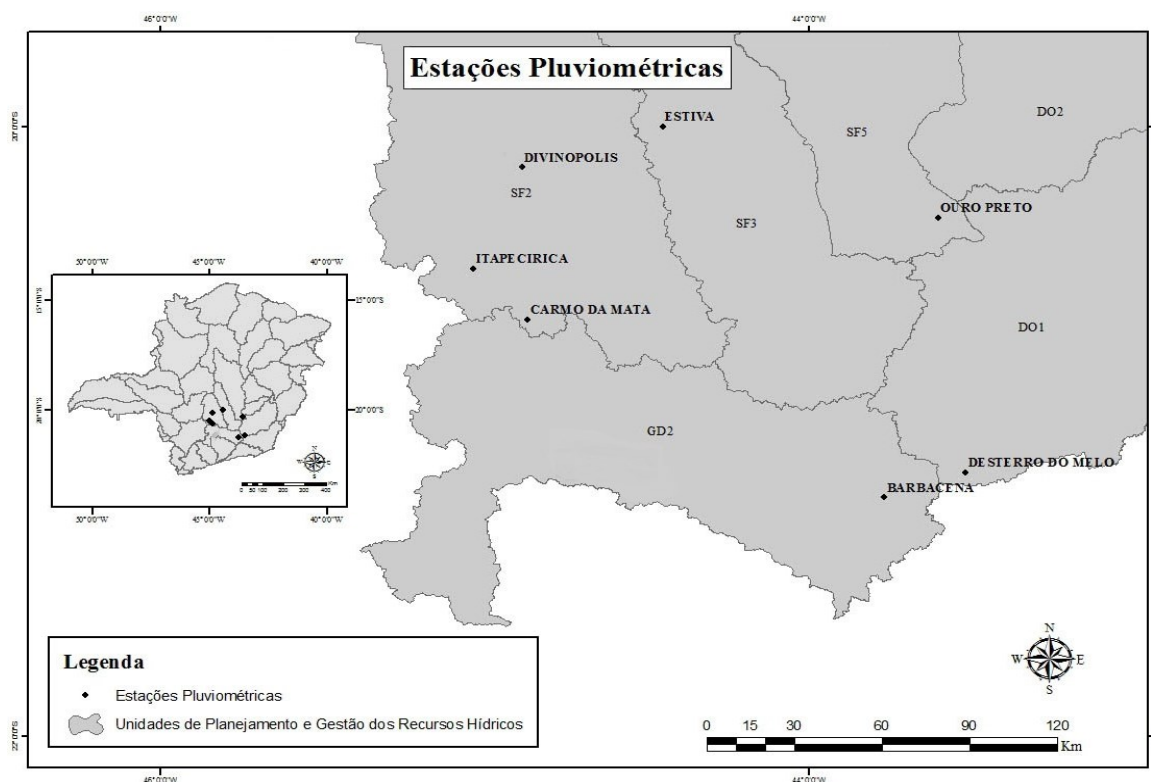


Tabela 1 Identificação das estações pluviométricas analisadas e período de monitoramento

Estações/ Município	Coordenadas Geográficas		Período de Monitoramento	Numero de Dados
Barbacena	21°13' 00 S	43°46' 00 W	1968 - 2008	41
Carmo da Mata	20°38' 28 S	44°52' 03 W	1977-2009	33
Desterro Mello	21°08' 57 S	43°31' 12 W	1942-2009	68
Divinópolis	20°08' 13 S	44°53' 31 W	1959-2011	52
Estiva/Mateus Leme	20°00' 01 S	44°27' 42 W	1977-2010	34
Itapecirica	20°28' 20 S	45°02' 10 W	1941-2011	71
Ouro Preto	20°18' 19 S	43°36' 59 W	1967-2007	41

A distribuição Log-normal a 3 parâmetros foi ajustada para cada série de dados, sua Função de Densidade de Probabilidade (FDP) é apresentada na Equação 1, utilizando-se os estimadores do Método do Momento (MM), Máxima Verossimilhança (MV) conforme proposto por se Naghettini & Pinto (2007)..

$$FDP: f(x) = \frac{1}{(x - \beta) \cdot \sigma_n \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-0,5 \left(\frac{\ln(x - \beta) - \mu_n}{\sigma_n} \right)^2} \quad (1)$$

Em que: x é a variável hidrológica (precipitação máxima diária anual); μ_n - parâmetro relacionado ao 1º momento amostral, estimado pela média dos dados logaritmizados; σ_n - parâmetro relacionado ao 2º momento amostral, estimado pelo desvio padrão dos dados logaritmizados; β - parâmetro relacionado ao 3º momento amostral, estimado com base no coeficiente de assimetria

Com os parâmetros estimados ajustados pelos métodos MM e MV, a fim de se observar qual o melhor ajuste de

probabilidade, representando adequadamente o conjunto de dados, aplicou-se os testes de aderência de Komolgorov Smirnov (ΔF) (eq2), Anderson Darling (eq. 3) e Qui-quadrado (χ^2) (eq. 4), a 5% de significância.

Na obtenção do ΔF , calculou-se o erro absoluto máximo entre a frequência observada e a probabilidade estimada. O valor de ΔF tabelado é encontrado em função da significância de 5% (α) e do número de dados da série histórica (n). Para valores menores que os tabelados, o modelo foi classificado como adequado (Equação 2).

$$|\Delta F|_{\text{calculado máx}} \leq |\Delta F|_{\text{tabela}(n, \alpha)} \quad (2)$$

O teste de aderência de Anderson-Darling é não-paramétrico e pondera mais fortemente as caudas das distribuições, nas quais, as maiores (ou as menores) observações da amostra podem alterar sobremaneira a qualidade do ajuste. Ele baseia-se na diferença entre as funções de probabilidades acumuladas, empírica,

FN(x), e teórica, FX(x), de variáveis aleatórias contínuas. Desse modo, a estatística do teste de Anderson-Darling torna-se:

$$AD^2 = -N - \frac{\left[\sum (2 \cdot i - 1) \cdot \left[\left(\ln(P_1(X < x_i)) \right) + \left(\ln(P_2(X > x_i)) \right) \right] \right]}{N}$$

onde: N é o tamanho da amostra, i a posição de cada um dos dados na série histórica posicionada em ordem crescente, P_1 corresponde a probabilidade calculada pela respectiva distribuição.

Se $AD^2 < p(\alpha)$ aceita-se a hipótese de ajuste de forma adequada da distribuição, sendo $p(\alpha) = 0,752$.

No Teste do Qui-quadrado (λ^2) a hipótese é testada fazendo-se a comparação entre as frequências observadas e as frequências teóricas, em cada classe de frequência da amostra, com a variável aleatória do λ^2 , dada por Campos (1979) citado por Catalunha et al. (2002):

$$\lambda^2_{\text{calculado}} = \sum_{i=1}^n \frac{(f_{\text{obsi}} - f_{\text{teoricoi}})^2}{f_{\text{teoricoi}}} \quad (4)$$

Em que n é o número de classes, F_{obsi} e f_{teoricoi} são respectivamente as frequências observada e teórica na classe i.

O λ^2 tabelado foi obtido com base no número de classes de frequência de cada série menos o número de parâmetros menos um, fornecendo os graus de liberdade, e significância de 5%. Se $\lambda^2_{\text{calc}} < \lambda^2_{\text{tab}}$ conclui-se que a distribuição de probabilidade é adequada à série estudada.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 2 apresenta os ajustes pelos métodos MM e MV para as séries históricas das 7 estações estudadas. Observou-se na referida figura a semelhança dos ajustes pelos dois métodos, fato que pode ser comprovado por meio da Tabela 2.

Na tabela 2 constam as estações pluviométricas consideradas no presente estudo, com os respectivos períodos de abrangência, que permitem constatar que suas extensões variam entre 33 e 71 anos de dados observados, dos quais, pelo menos 31 anos de dados, são comuns a todas (período compreendido entre 1977 a 2007). Também é apresentado os resultados dos testes de aderência, para a verificação do melhor ajuste dos parâmetros.

Figura 2 Ajustes da distribuição Log-normal a 3 parâmetros à série histórica de precipitação máxima diária anual

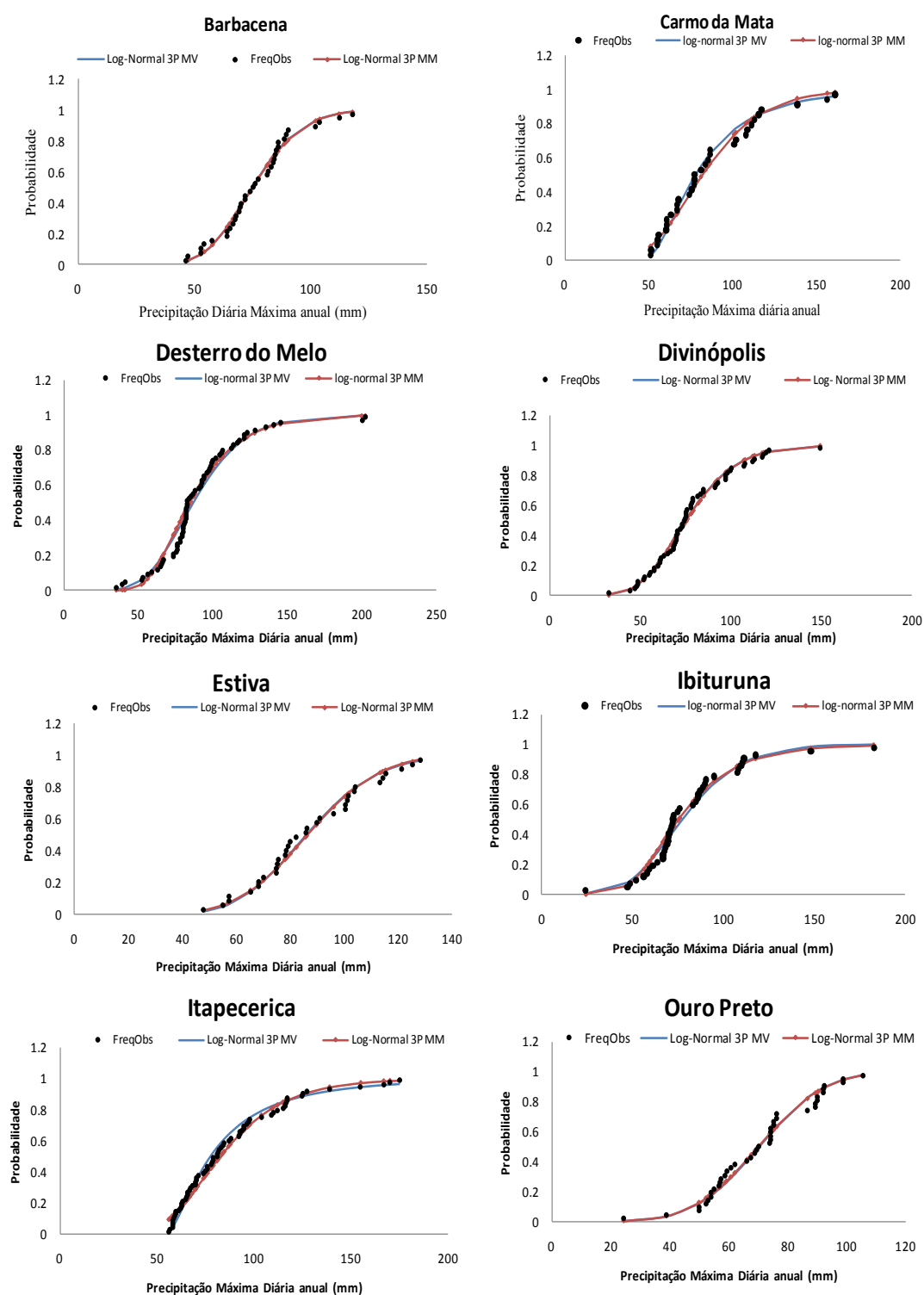


Tabela 2 Verificação dos testes de aderência gerados pelo ajuste da distribuição de probabilidade Log-Normal 3P, para os métodos MM e MV e extraídos de tabela a 5% de significância

Distribuição Log Normal a 3 Parâmetros							
Estações Pluviométrica	N	Método	Kolmogorov Smirnov		Anderson-Darling		λ^2
			r. critic	r. calc	r. critic	r. calc	
Barbacena	41	MM	0,224	0,0616 ^A	0,752	0,295 ^A	0,103
Carmo da Mata	33		0,237	0,0851 ^A	0,752	0,401 ^A	0,004
Desterro Mello	68		0,165	0,1299 ^A	0,752	1,406^{NA}	0,352
Divinópolis	53		0,170	0,0791 ^A	0,752	0,340 ^A	0,103
Estiva	34		0,233	0,0825 ^A	0,752	0,107 ^A	0,103
Itapecirica	71		0,161	0,0836 ^A	0,752	0,902^{NA}	0,352
Ouro Preto	41		0,212	0,0946 ^A	0,752	0,487 ^A	0,004
Barbacena	41	MV	0,224	0,06481 ^A	0,752	0,301 ^A	0,103
Carmo da Mata	33		0,237	0,0901 ^A	0,752	0,316 ^A	0,004
Desterro Mello	68		0,165	0,1070 ^A	0,752	0,976^{NA}	0,352
Divinópolis	53		0,170	0,0768 ^A	0,752	0,331 ^A	0,103
Estiva	34		0,233	0,0904 ^A	0,752	0,102 ^A	0,103
Itapecirica	71		0,161	0,0740 ^A	0,752	0,568 ^A	0,352
Ouro Preto	41		0,212	0,0986 ^A	0,752	0,513 ^A	0,004

NA - Valores não adequados (em negrito); A – valores adequados aos testes de Kolmogorov Smirnov, Anderson-Darling e Qui-quadrado; r.calc. – r calculado.

Observou-se que o teste de Qui-quadrado se destaca por ser mais rígido que o de Anderson –Darling e o de Kolmogorov-Smirnov, sinalizando um maior rigor do mesmo na constatação do ajuste da distribuição de probabilidades aos dados observados. Aja vista que o λ^2 classificou como inadequadas 28,7 % dos modelos para os métodos de estimativa dos parâmetros, enquanto que os Anderson-Darling apenas 14,3% no MV e Kolmogorov Smirnov 0% para os dois métodos. Vários estudos corroboram com a afirmação, quando se compara os testes não paramétricos (THEBALDI, 2012; MARQUES et. al., 2014; CALDEIRA et al., 2016; MIRANDA et al., 2017).

Tomando como base o teste de λ^2 , identificou-se porcentagens de adequacidade semelhantes para os dois métodos de estimativa dos parâmetros (71,3%), as quais não se pode afirmar qual o melhor método de ajuste.

Quando se compara em relação ao teste de Anderson-Darling, observou-se um maior ajuste pelo MV (85,7 %) em relação ao MM (71,3%).

Comparando-se os valores de rcalc para as estações pluviométricas, verificou-se que os valores gerados com base no MV são maiores quando comparados ao MM, corroborando com os estudos de Mello & Silva (2005), Hartmann et al. (2011) e Silva & Clarke (2004) onde foi verificado maior

precisão do ajuste das distribuições pelo método de estimativa dos parâmetros MV.

As series históricas das estações pluviométricas de Desterro Mello, Carmo da Mata e Ouro Preto não mostraram aderência pelo teste de Anderson-Darlling e λ^2 para os dois métodos de estimativa dos parâmetros. Ressalta-se que dentre elas, a estação de Ouro Preto não mostrou aderência, fato que pode estar associado a uma característica particular como a ocorrência de eventos orográficos. Sendo que, de acordo com Sobreira & Fonseca (2001), a região é caracterizada por relevo muito acidentado, com presença de serras tendo como limite a norte a Serra de Ouro Preto e a sul a Serra do Itacolomi, favorecendo tais eventos.

CONCLUSÕES

O teste de Komolgorov Smirnov indicou todos os ajustes como aderentes, não diferenciando segundo este critério, nenhum dos métodos.

O teste do Qui-Quadrado mostrou-se como o mais restritivo, com 28,7% de não aderência nos dois métodos de ajuste dos parâmetros da distribuição de probabilidade, tendo neste caso, maior poder discricionário que os demais testes de verificação de aderência, devendo o mesmo ser tomado como base para os estudos,

principalmente, quando associados ao risco do potencial erosivo de uma chuva.

Não foi possível identificar qual método de ajuste teve melhor eficácia para o teste de Qui-Quadrado.

REFERÊNCIAS

- ANA - Agência Nacional das Águas. Sistema de Informações Hidrológicas. Disponível em: <http://hidroweb.ana.gov.br/>. Acesso em 10/04/2012.
- BACK, A. J. Seleção de distribuição de probabilidade para chuvas diárias extremas do estado de SantCatarina, **Revista Brasileira de Meteorologia**, 2001. v. 16, n.2, 211p.
- CALDEIRA, T. L, BESKOW, S. MELLO, C. R. FARIA, L. C. SOUZA, M, R. GUEDES, H. A. S. Modelagem probabilística de eventos de precipitação extrema no estado do Rio Grande do Sul. **Agriambi**, Campina Grande, v.19, n. 3, p. 197-203, 2016.
- CALGARO, M.; ROBAINA, A. D.; PEITER, M. X.; BERNARDON T. Variação espaço-temporal dos parâmetros para a modelagem estocástica da precipitação pluvial diária no Rio Grande do Sul. **Engenharia Agrícola**, Jaboticabal, v.29, n.2, p.196-206, 2009.
- CATALUNHA, M. J. et al. Aplicação de cinco funções densidade de probabilidade a series de precipitação pluvial no Estado de Minas Gerais. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, Santa Maria, v. 10, n. 01, p. 153-162, 2002.
- CEMADEN - Centro Nacional de Monitoramento e Alertas naturais Disponível em

<http://www.cemaden.gov.br/municipiosprio.php>, Acesso em: 27/04/2017.

HATMANN, M.; MOALA, F. A.; MENDONÇA, M. A. Estudo das precipitações máximas anuais em Presidente Prudente. **Revista Brasileira de Meteorologia**, São José dos Campos, v.26, n.4, 561 – 568, 2011.

JUNQUEIRA JÚNIOR, J. A. GOMES, N. M. MELLO, A. R. SILVA, A. M. Precipitação provável para a região de Madre de Deus, Alto rio Grande: modelos de probabilidades e valores característicos. Lavras: **Ciência e Agrotecnologia**, v. 31, n. 3, p. 842-850, 2007

LONGO, J. L.; SAMPAIO, C. S.; QUEIROZ, M. M. F.; SUSZEK, M. Uso das distribuições gama e log-normal na estimativa de precipitação provável quinzenal. **Revista Varia Scientia**, Cascavel, v. 6, n. 3, p. 107-118, 2006.

MARQUES, R. F. P. V.; MELLO, C. R., SILVA, A. M. ; FRANCO, C. S. ; OLIVEIRA, A. S. . Performance of the probability distribution models applied to heavy rainfall daily events. **Ciência e Agrotecnologia**, v. 38, p. 335-342, 2014.

MARTINS, C. A; ULIANA, E. M; REIS, E. F. Estimativa da vazão e da precipitação máxima utilizando modelos probabilísticos na bacia hidrográfica do rio Benevente. **Enciclopédia biosfera**, v. 7, n.13, p. 1130-1142, 2011.

MELLO, C. R.; SILVA, A. M. Métodos Estimadores dos Parâmetros da Distribuição de Gumbel e sua Influência em Estudos Hidrológicos de Projeto. **Irriga**, Botucatu, v. 10, n, 4, p. 318-334, 2005.

MELLO, C. R.; SÁ, M. A. C. de; CURI, N; MELLO, J. M.; VIOLA, M. R.; SILVA, A. M. Erosividade mensal e anual da chuva no Estado de Minas Gerais. **Pesquisa**

Agropecuária Brasileira, Brasília, v. 42, n. 4, p. 537-545, 2007.

MIRANDA, C. T. S., THEBALDI, M. S., ROCHA, G. M. R, B. Precipitação máxima diária anual e estimativa da equação de chuvas intensas do município de Divinópolis, MG, Brasil,. **Revista Scientia Agraria**, Curitiba v. 18, n. 4, p. 09-16, 2017

NAGHETTINI, M.; PINTO, E. J. A.: **Hidrologia estatística**. Belo Horizonte: CPRM, 2007. 552p.

SOBREIRA, F.G. & FONSECA, M.A. Impactos físicos e sociais de antigas atividades de mineração em Ouro Preto, Brasil. **Revista Portuguesa de Geotecnia**, Lisboa, nº 92, p. 5-28. 2001.

SILVA, B. C.; CLARKE, R. T. Análise estatística de chuvas intensas na Bacia do Rio São Francisco. **Revista Brasileira de Meteorologia**, São José dos Campos v. 19, n. 3, p. 265-272, 2004.

THEBALDI, M. S.. Análise estatística da precipitação máxima diária anual da cidade de Uberaba e vazão mínima diária anual do Rio Uberaba. **Revista Agrogeoambiental**, v. 4, p. 1, 2012.

RODRIGUES, J. A.; FILHO, J. S.; CHAVES, L. M. Funções densidade de probabilidade para a estimativa de precipitação mensal. **Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas**, v. 34, n. 1, p. 03-08, 2013